*Econometrica*, Vol. 47, No. 5 (September, 1979)

# ETALON(S) ET "TRANSFORMATION": POUR CLORE UN DEBAT

PAR G. ABRAHAM-FROIS ET E. BERREBI

LA MARCHANDISE COMPOSITE, étalon des prix de Sraffa [**5**], présentait deux propriétés immédiatement intéressantes: l'invariance par rapport aux variations de la répartition, la linéarité de la courbe salaire-profit.

Il est apparu ensuite qu'une telle structure, longtemps considérée comme unique, permettait d'analyser les cas où était réalisée la transformation au sens de Marx; certains auteurs [**1** et **3**] ont en effet montré que la transformation était réalisée lorsque l'économie avait une structure du même type que l'étalon de Sraffa.

Les travaux récents de Takahiro Miyao [**2**] permettent de déterminer les cas particuliers où existent des étalons distincts de celui de Sraffa. A partir de ces travaux, nous mettons un point final à la controverse sur la "transformation" en établissant *tous les cas particuliers* où elle est réalisée.

Soit: $A$—la matrice carrée de format $(k \times k)$ des inputs; $I$—la matrice unité des outputs de format $(k \times k)$; $L$—le vecteur colonne des besoins en travail direct (supposé homogène); $w$—le salaire, uniforme; $r$—le taux de profit, uniforme; $d$—le vecteur ligne représentant le panier de biens de consommation reçus par l'ouvrier pour chaque unité de travail; et $y$—le vecteur ligne des niveaux d'activité.

Le système des prix de production s'écrit, en reprenant ici l'hypothèse faite par Sraffa d'un salaire payé 'post factum': $p = (1+r)Ap + wL$.

La condition de normalisation de Sraffa est: $q(I-A)p = 1$, le vecteur $q$ étant défini par:

$$\alpha q = qA \quad \left(\alpha = \frac{1}{1+R} \text{ étant la valeur propre dominante de } A\right),$$

$$qL = 1.$$

T. Miyao a établi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'étalons des prix de production rendant linéaire la courbe salaire-profit ($FpF$). En notant $K = [L, AL, A^2L, \ldots A^{k-1}L]$ la matrice carrée qui a pour colonnes les vecteurs $L, AL, A^2L, \ldots A^{k-1}L$ on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME DE MIYAO: *La condition nécessaire et suffisante d'existence de m marchandises étalon indépendantes*[1] *est que le rang de la matrice K soit égal à* $k-m+1$ *où* $m = 1, 2, \ldots k$.

Quand la matrice $K$ a pour rang $k-m+1$, on $a: L \in E_{k-m+1} = \{\bar{p}, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{k-m+1}\}$ où $E_{k-m+1}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $k-m+1$ engendré par des vecteurs propres à droite $\bar{p}, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_{k-m+1}$ associés aux valeurs propres $\alpha, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-m+1}$ de $A$.

Il en résulte que toute marchandise $u = q + \mu z$ avec $z \in F_{m-1}$ où $F_{m-1}$ est un sous-espace vectoriel engendré par $m-1$ vecteurs propres à gauche de $A$ linéairement indépendants et orthogonaux à $E_{k-m+1}$, est un étalon.

Notons que les marchandises étalon $u$ sont les seuls vecteurs-ligne vérifiant la relation:

$$\frac{up(r)}{uAp(r)} = 1+R \quad \text{soit} \quad u[I-(1+R)A]p(r) = 0.$$

Il en résulte que la relation

$$y[I-(1+R)A]p(r) = 0$$

est vérifiée si et seulement si y a la structure d'une des marchandises étalon du système $[A, I, L]$.

[1] On a traduit "basic standard commodities" par "marchandises étalon indépendantes."

L'objet de cette note est de montrer que les propositions de Marx relatives à la "transformation" des valeurs en prix de production et de la plus-value globale en profit ne sont vérifiées que dans des cas particulier que les "étalons" nou permettront d'identifier.

Notons: $A^* = A + Ld$ la matrice socio-technique prenant en compte la reproduction de la force de travail; $\Lambda$—le vecteur colonne des valeurs défini par $\Lambda = A\Lambda + L$; $e$—le taux de plus-value ou taux d'exploitation $e = (1 - d\Lambda)/d\Lambda$; $\alpha^* > 0, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \ldots$—les valeurs propres de la matrice $A^*$; et $q^* > 0, q_2^*, q_3^*, \ldots$ et $p^*, p_2^*, p_3^*, \ldots$—les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice $A^*$ associés aux valeurs propres $\alpha^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \ldots$.

Le taux de profit défini par Marx dans le système des valeurs comme rapport de la plus-value globale à la valeur totale du capital avancé a pour expression:

$$R_\Lambda = \frac{y(I - A^*)\Lambda}{yA^*\Lambda} = \frac{eyL\,d\Lambda}{yA\Lambda + yL\,d\Lambda} = \frac{e}{1+k}$$

où $k = yA\Lambda/yL\,d\Lambda$ est la composition organique du capital.

On sait depuis Bortkiewicz les problèmes de cohérence logique que poserait l'introduction d'un taux de profit calculé dans le système des valeurs à l'intérieur d'un système de prix de production où il y a co-détermination simultanée des prix et des variables de répartition, le système présentant un degré de liberté.

Dans le cas envisagé par Marx où le salaire est avancé, et intégralement avancé, le taux de profit $R^*$ est défini dans le système de prix de production:

$$p^* = (1 + R^*)(Ap^* + Lw) \quad \text{avec} \quad w = dp^* \quad \text{soit}$$

$$p^* = (1 + R^*)(Ap^* + L\,dp^*) = (1 + R^*)(A + Ld)p^* \quad \text{ou}$$

$$p^* = (1 + R^*)A^*p^*.$$

Le vecteur prix $p^*$ qui apparaît comme vecteur propre à droite de la matrice $A^*$ associé à la valeur propre dominante $\alpha^* = 1/(1 + R^*)$ est défini à une homothétie près. On peut normer les prix $p^*en$ posant

$$yp^* = y\Lambda$$

ce qui permet, en particulier, de rendre les prix et les valeurs commensurables. Cette normalisation exprime aussi que la somme des prix de production est égale à la somme des valeurs.

Le système des prix de production peut s'écrire sous la forme

$$(I - A^*)p^* = R^*A^*p^*.$$

On a alors, en particulier:

$$y(I - A^*)p^* = R^*yA^*p^* \quad \text{soit} \quad R^* = \frac{y(I - A^*)p^*}{yA^*p^*}.$$

Il $y$ a transformation quand la structure du vecteur niveaux d'activité $y$ est telle que $R^* = R_\Lambda$ ou $y(I - A^*)\Lambda/yA^*\Lambda = R^*$. En effet, compte tenu de la condition de normalisation des prix $yp^* = y\Lambda$ (somme des prix égale somme des valeurs), il est clair que

$$R_\Lambda = R^* \Leftrightarrow y(I - A^*)\Lambda$$
$$= y(I - A^*)p^* \quad \text{(la plus-value totale est égale au profit global).}$$

La condition $y(I - A^*)\Lambda/yA^*\Lambda = R^*$ peut se mettre sous la forme:

$$y[I - (1 + R^*)A^*]\Lambda = 0.$$

De la relation $\Lambda = (I - A)^{-1}L$ il résulte que quand $L \in E_{k-m+1}$, où $E_{k-m+1}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$ engendré par $k - m + 1$ vecteurs propres à droite de $A$ linéairement indépendants $\bar{p}, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_{k-m+1}$, on a $\Lambda \in E_{k-m+1}$. (Si $m = 1$, $\Lambda$ et $L$ n'appartiennent à aucun sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{R}^k$, car dans ce cas $E_{k-m+1} = E_k = \mathbb{R}^k$.)

Comme le sous-espace vectoriel $E_{k-m+1}$ est invariant à droite[2] par la matrice $A^*$, il en résulte que la relation

$$y[I-(1+R^*)A^*]\Lambda=0$$

est vérifiée si et seulement si $y=q^*+\mu z$ avec $z\in F_{m-1}$ où $F_{m-1}$ est un sous-espace vectoriel orthogonal à $E_{k-m+1}$ engendré par $m-1$ vecteurs propres à gauche de $A$ linéairement indépendants, c'est-à-dire si et seulement si $y$ est un étalon de la matrice $A^*$. D'où:

THÉORÈME: *La "transformation" est réalisée si et seulement si le vecteur niveaux d'activité (ou d'output) y est un "étalon" de la matrice $A^*$.*

Notons en particulier: (i) Quand rang $(K)=1$ la transformation est réalisée quelle que soit la structure du vecteur niveaux d'activité; il s'agit du cas bien connu de Marx où la composition organique est identique dans toutes les branches. (ii) Quand rang $(K)=k$ la transformation n'est réalisée que si $y=q^*$.

Bien entendu quand $y=q^*$ avec rang $(K)<k$ la transformation est toujours réalisée. C'est notamment ce qui se passe dans le cas envisagé par Samuelson [**4**] où $y=q^*$ et rang $(K)=2$ du fait des hypothèses selon lesquelles toutes les lignes de la matrice $A$, le vecteur $y$ et le vecteur $d$ sont homothétiques. Dans le régime de Marx–von Neumann où $y=q^*$ parce que les capitalistes accumulent la totalité de la plus-value, la transformation est réalisée quel que soit le rang de $K$.

*U.E.R. de Sciences Economiques, Université de Paris-X-Nanterre.*

*Manuscript received July, 1977; final revision received September, 1978.*

## REFERENCES

[**1**] ABRAHAM-FROIS, G., ET E. BERREBI: *Théorie de la valeur, des prix et de l'accumulation.* Paris: Economica, 1976; Edition anglaise: Cambridge University Press, 1979.

[**2**] MIYAO, TAKAHIRO: "A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and Its Complete Characterization," *International Economic Review*, 18 (1977), 151–162.

[**3**] MORISHIMA, M.: "Marx in the Light of Modern Economic Theory," *Econometrica*, 42 (1974), 611–632.

[**4**] SAMUELSON, P. A.: "Understanding the Marxian Notion of Exploitation: A Summary of the So-called Transformation Problem between Marxian Values and Competitive Prices," *Journal of Economic Literature*, 9 (1971), 399–431.

[**5**] SRAFFA, P.: *Production de marchandises par des marchandises.* Paris: Dunod, 1970.

[2] En effet si $L\in E_n=\{\bar{p},\bar{p}_2,\ldots\bar{p}_n\}$, on a pour tout $v\in E_n$: $A^*v=(A+Ld)v=Av+L(dv)\in E_n$ puisque $Av\in E_n$, et, $dv$ étant un scalaire, $L(dv)\in E$.