ARTICLE

Gilbert Abraham-Frois
MODEM, Paris X

Emeric Lendjel
MODEM, Paris X

Une première application du théorème de Perron-Frobenius à l'économie : l'abbé Potron comme précurseur

A first application of the Perron-Frobenius theorem to economic analysis : father Potron as precursor

modèles linéaires de production - théorème de Perron-Frobenius - histoire de la Pensée

linear production models - Perron-Frobenius theorem - history of economic analysis

* Une première version de ce papier a été présentée à un séminaire du MODEM, Paris-10-Nanterre. Nous sommes particulièrement redevables à Ch. Bidard de certaines observations qui nous ont permis d'utiles précisions.

Résumé. — Maurice Potron est un Père jésuite polytechnicien dont les publications s'échelonnent de 1911 à 1936 et dont l'apport nous semble considérable et pratiquement inconnu. L'apport de l'auteur se situe aussi en mathématique (travaux sur les matrices à éléments non-négatifs précédant les travaux de Frobenius) mais c'est l'aspect économique qui va être privilégié ici : première construction d'un tableau d'échanges inter-industriel simplifié et surtout première utilisation du théorème de Perron-Frobenius dès avant la première guerre mondiale.

Summary. — *Maurice Potron is a Jesuit polytechnician who made publications between 1911 and 1936; his work seems both considerable and quite unknown. His publications concern also mathematics (non-negative matrices preceding Frobenius work) but this paper will be mainly concerned with economics; Potron made the first construction of a simplified input-output table and over-all he was the first to propose application of Perron-Frobenius theorem to economic analysis.*

Maurice Potron, parfois nommé l'abbé Potron dans certaines de ses publications est un Père jésuite polytechnicien dont les publications s'échelonnent de 1911 à 1936 et dont l'apport nous semble considérable et pratiquement inconnu. L'apport de l'auteur est en fait au moins triple :

• sur le plan purement mathématique, les travaux de Potron sur les matrices à éléments non-négatifs paraissent dès 1911, soit avant la publication de ceux de Frobenius sur le même sujet en 1912 (1) comme le revendique Potron ([1913], p. 53). Perron et Frobenius n'avaient établi, en 1908 et 1909, que des théorèmes relatifs aux matrices à éléments strictement positifs.

• par ailleurs, Potron a établi les bases des modèles d'échanges interindustriels. Le concept de « coefficients techniques », présent dès 1912, se retrouve ensuite dans un texte de 1936 suivi d'une annexe joliment intitulée « La manne des Hébreux ». Cette annexe, très pédagogique, comporte différents biens, le *« gomor »* de manne, le *« chomer »* de combustible et une présentation d'un petit modèle d'échange interindustriels, d'un premier tableau de Leontief. L'antériorité par rapport au prix Nobel ne fait pas de doute : en effet, d'après la bibliographie exhaustive de W. Leontief « établie par l'auteur lui-même » (2), les premiers travaux de Leontief « The Balance of the Economy of the USSR » paraissent, en russe et en anglais en 1925, et le grand ouvrage *The Structure of the American Economy* est de 1941.

• Alors que les utilisations du théorème de Perron-Frobenius que nous avons pu recenser sont toutes postérieures à la Seconde Guerre Mondiale, les premiers travaux de Potron sur ce thème sont antérieurs à la Première Guerre Mondiale. Pour éviter les erreurs de perspective, il faut sans doute souligner ceci : même si les exposés contemporains traitant de l'analyse de modèles de prix de production ou de croissance équilibrée utilisent large-

(1) G. Frobenius : « Uber Matrizen aus nichtegativen Element » *Sitzungdbercichte der Königlich-Pressischen Akademie der Wissenschaften.*

(2) B. Rosier : *Wassily Leontief - Textes et itinéraire* La Découverte 1986.

ment le théorème de Perron-Frobenius, l'ouvrage fondamental de P. Sraffa *(Production de Marchandises par des Marchandise)* n'y fait pas la moindre allusion (3).

Ce dernier aspect de l'œuvre de Potron sera privilégié dans les développements qui suivent. Pour plus de clarté, nous commencerons par un rapide rappel des notations et résultats qui sont actuellement bien connus, sans reprendre des notations évidemment très datées et d'autant plus embarrassantes pour le lecteur que Maurice Potron ne se situe pas dans un cadre familier à l'économiste contemporain. Nous tenterons ensuite d'établir le parcours qui a conduit le Père Potron, mathématicien, à développer ses travaux en économie.

1. Un bref rappel d'abord

Il est maintenant bien connu (4) que si l'on note : A une matrice indécomposable de format $k \times k$, p un vecteur ligne de prix à k composantes, l le vecteur ligne des besoins en travail direct (supposé) homogène à k composantes, w le salaire (scalaire) supposé identique pour tous les travailleurs et déterminé de manière exogène, on définit le système de prix par : $p = pA + wl$.

Il vient : $p - pA = p(I - A) = wl$.

Pour aller plus loin, il faut alors faire l'une des trois hypothèses suivantes, dont on peut démontrer qu'elles sont strictement équivalentes : soit supposer directement que la matrice $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} > 0$, soit supposer (théorème de Perron-Frobenius) que la valeur propre dominante de A est inférieure à l'unité, soit supposer que le système est « productif », c'est-à-dire que son fonctionnement permet de dégager un surplus net de biens.

Lorsque l'une de ces conditions (strictement équivalentes) est satisfaite, la matrice inverse $(I - A)^{-1}$ est strictement positive et les prix dits « prix de Leontief » sont strictement positifs :

$$p = wl(I - A)^{-1} > 0$$

On peut prolonger l'analyse en envisageant le cas de pluralité de qualifications, bref d'hétérogénéité du travail. Si on dispose de *m* catégories de travailleurs, soit :

(3) Il semble qu'en 1942 A. S. Besicovitch ait envoyé la démonstration du théorème à P. Sraffa sur une carte postale qui (d'après Ch.Bidard que nous remercions pour ces indications) n'a toujours pas été retrouvée.

(4) depuis l'article de G. Debreu et I.N. Herstein [1953]. Cet article qui nous paraît la référence en la matière donne une série de références impressionnantes concernant les conditions d'applicabilité de leurs résultats ; parmi ceux-ci : D. Hawkins et H.A. Simon [1949] ; à signaler également les chapitres dûs à K.J. Arrow et N. Georgescu-Roegen *in* T.C. Koopmans (éd.) [1951] ; *cf.* également R. Solow [1952]. Dans une optique un peu différente, *cf.* l'article de L.A. Metzler [1945]. On notera que tous ces articles sont postérieurs à la seconde guerre mondiale.

• L la matrice de format m × k représentant les quantités des *m* catégories de qualifications (ingénieurs, ouvriers, employés, comptables, informaticiens) nécessaires pour produire les k types de biens.

• W le vecteur ligne des salaires versés par type de qualification, déterminés de façon exogène et de format l × m

Il vient alors, sous les mêmes conditions :

$$p = WL(I - A)^{-1} > 0$$

De façon parallèle, dans un système de type Leontief, si on note : x le vecteur colonne des production globales, y le vecteur colonne des demandes finales on a : $x = Ax + y$, d'où $(I - A)x = y$.

Sous des conditions identiques, il vient : $x = (I - A)^{-1} y > 0$.

Dans le cas où la matrice A est décomposable, (le système restant productif), prix ou productions peuvent ne pas être tous simultanément positifs, mais restent non-négatifs.

On retiendra pour terminer la proposition suivante. A la valeur propre réelle la plus élevée de la matrice A (dite « valeur-propre dominante ») et notée λ est associé un vecteur propre *x* à composantes non-négatives et tel que $\lambda x = Ax$.

Ces résultats maintenant standards, ainsi que beaucoup d'autres, se trouvent déjà dans différentes publications, articles ou brochures du Père Potron qui s'échelonnent de 1911 à 1936. C'est à cet auteur que revient à notre sens, et sans aucune ambiguïté, l'idée d'appliquer les théorèmes de Perron-Frobenius à l'économie comme en témoigne la citation suivante, tirée d'une communication de 1913 :

> « Les résultats obtenus [par Perron-Frobenius] fournissant la solution complète du problème suivant : Étant donnée une substitution (5) linéaire à coefficients ≥ 0, trouver une fonction linéaire, à coefficients > 0, que cette substitution multiplie par un facteur constant. Comme on le verra ensuite, c'est précisément à ce problème mathématique que se ramène le problème économique des Salaires (6), problème consistant à trouver un régime des prix des divers objets et des salaires des diverses catégories de travailleurs, tel que, pour chaque objet, le prix de vente soit au moins égal au prix coûtant et que, pour chaque travailleur supposé menant une existence convenant à sa catégorie, le salaire soit au moins égal au coût de la vie, lequel correspond précisément des prix des divers objets » (Potron [1913] p. 53) (7).

Le message de M.P. a cependant été difficile à déchiffrer par ses contemporains, bien qu'il ait fait l'objet de différentes communications à l'Académie des Sciences (8). Il faut dire que l'auteur n'a pas facilité la tâche à ses lecteurs.

(5) nous dirions une matrice.
(6) majuscule de l'auteur.
(7) L'idée d'applicabilité est déjà présente dans les communications de 1911, mais elle reste non explicitée.
(8) Séances des 4 et 26 décembre 1911 (Potron [1911a] et [1911b]).

D'abord parce que ses communications portent à la fois sur l'aspect mathématique et l'aspect économique ; à titre d'exemple, les conférences faites à l'Institut Catholique de Paris en 1937 sont au nombre de six, savoir :

I L'équilibre production-consommation

II L'ajustement des prix et des salaires

III Les matrices à éléments positifs

IV Les matrices à éléments non négatifs

V Résolution récurrente d'un système d'équation linéaires

VI Conclusions

Ce texte qui date sans doute de 1936 est le texte le plus clair et le plus complet que nous ayons pu trouver (9) et c'est à ce texte que nous référerons pour l'essentiel ; mais il faut noter dès maintenant que les mêmes résultats sont indiqués sous une forme plus sibylline dans deux communications à l'Académie des Sciences de 1911, ce qu'on indiquera un peu plus loin...

Nous ne savons rien ni de l'auditoire, ni de la diffusion (10). Mais il est clair que ce mixte d'économie et de mathématiques ne pouvait pas ne pas faire problème. Bien entendu, la présentation qui est faite ici se limite à l'aspect économique dont la présentation n'est pas facile. Pas simplement parce que les notations utilisées sont loin d'être standard ; il est bien normal qu'un jésuite qui écrit au début du siècle n'ait aucune familiarité avec les notations employées de nos jours par les spécialistes des modèles linéaires. Mais également parce qu'il se situe dans une logique assez personnelle. Il envisage dans les conférences citées ci-dessus, et qui constituent la synthèse et l'aboutissement de ses travaux deux séries de problèmes, celui de l'équilibre « production consommation » (première conférence), celui de « l'ajustement prix-salaires » (deuxième conférence). Il attache beaucoup d'importance au fait qu'il existe plusieurs niveaux de qualification et plusieurs types de consommateurs. Cela a pour conséquence l'ordre des problèmes qu'il souhaite résoudre 1) adéquation possible entre la structure de la consommation et la structure de production ; 2) possibilité de prix et salaires compatibles ; 3) équilibre qui soit « effectivement » satisfaisant. Il nous a cependant semblé préférable, pour clarifier l'exposé, de commencer par la deuxième conférence.

(9) Une brochure intitulée « Les équilibres production-consommation et prix-salaires », Éditions S.P.E.S Paris, n'a pu être retrouvée ; mais il ne semble pas que des résultats différents y aient été indiqués.

(10) Potron, dans une note manuscrite, relève seulement la présence de Divisia et de Roy parmi ses auditeurs. Il y indique également le nombre d'auditeurs, qui varie de 10 à 100 selon les séances.

2. L'ajustement prix-salaires chez M. Potron

Par rapport aux modèles très simples présentés à titre introductif, M. Potron envisage non pas un travail « homogène » mais m professions et niveaux de vie, ce qui complique beaucoup son exposé. Du même coup, on ne définit plus comme dans un Leontief simple la quantité d'heures de travail (homogène) nécessaire à la production d'une unité de biens (l_i dans le modèle standard) mais le nombre d'heures (noté l_{kh}) que fournit une profession (h) pour produire une unité du bien k. On voit bien qu'il s'agit pour lui non pas d'un modèle purement théorique, mais bien d'un outil destiné à faciliter la compréhension et l'action ; à maintes reprises, il s'interroge d'ailleurs sur les conditions d'applicabilité (11), par exemple :

> « Les données du problème (état de l'industrie, niveaux de vie...) pourraient être telles que les systèmes (I) et (II) n'aient *aucune* (12) solution, leurs diverses relations étant *incompatibles*. De là l'intérêt d'une étude mathématique permettant de prévoir si un système de cette forme admet ou non des solutions. La condition d'existence de solutions est... que le nombre 1 soit supérieur à la valeur d'une certaine fonction *continue* des coefficients. Si donc cette fonction est *nettement* > ou < à 1, l'inégalité subsistera si les coefficients sont *un peu* modifiés. On voit donc que pour obtenir des conclusions *certaines*, une connaissance *approchée* des coefficients du tableau de... suffira. De plus, étant donnée l'indétermination du problème, un régime économique *réel* peut, sans cesser d'être satisfaisant, s'écarter *un peu* du modèle théorique construit. » (Potron [1936a], p. 10).

Par ailleurs, le souci de rapport au concret est évident à propos du traitement du salaire et du niveau de vie. Ainsi, Potron considère que ses équations théoriques s'appuient sur les enregistrements comptables auxquels procèdent les agents eux-mêmes :

> « il n'y a pas à chercher bien loin ces équations ; elles ont, pour ainsi dire, une existence concrète, ce sont les égalités entre prix, salaires, bénéfices, économies, qui *figurent de fait sur les livres de comptes des industriels, commerçants, maîtresses de maisons, ménagère* » (Potron [1912], p. 290 ; ou encore p. 300).

L'auteur note b_{ki} le nombre d'unités du bien i (qu'il appelle « rations ») annuellement consommé par un travailleur de profession h. Ceci définit le « coût de vie » du ménage consommateur, et *« en retranchant ce coût de vie du salaire effectif, on a les économies du ménage »* (Potron [1936a], p. 7). On est ainsi confronté à un système original qui n'est pas un système de prix de production (il n'y a aucune hypothèse relative à l'existence d'un équilibre général, d'un taux de profit uniforme) mais d'un système de prix proche du

(11) Nous y reviendrons.
(12) souligné par l'auteur.

système de « prix de Leontief ». Par rapport à ce dernier cas, bien connu et rappelé supra, plusieurs particularités doivent être signalées :

a) le calcul est mené à partir non de la matrice habituelle *A* mais d'une matrice socio-technique de type A* dans lequel, pour reprendre l'expression de Sraffa *« les salaires (sont) constitués par les subsistances nécessaires aux travailleurs et par suite qu'ils (entrent) dans le système au même titre que le carburant destiné aux moteurs ou que la nourriture consommée par le bétail »* (13). Un traitement avec des notations contemporaines (14) permet d'éclairer la formulation envisagée par Potron.

• On envisage d'abord le cas de travail homogène. On note d le vecteur (colonne) semi-positif qui représente le panier de biens consommés par un travailleur. La matrice « socio-technique » A* est définie par

$$A^* = A + dl \quad \text{où} \quad a^*_{ij} = a_{ij} + d_i\, l_j$$

Le nouveau coefficient a^*_{ij} rend compte de l'ensemble des besoins en bien *i* nécessaires à la production d'une unité de bien j : consommation « intermédiaire » désignée par a_{ij} à laquelle il convient d'ajouter les consommation de bien i nécessaires à la consommation « finale » des travailleurs dont l_j unités ont été nécessaires pour produire une unité du bien i.

Dans le cas envisagé par M.P. de pluralité de qualifications, d'hétérogénéité du travail, on notera D la matrice de format $k \times m$ représentant les paniers de biens consommés par les différentes catégories de travailleurs (au nombre de m d'après les notations déjà utilisées). Comme on a déjà noté précédemment L la matrice des besoins en travail qualifié nécessaires à la production des k biens, la matrice socio-technique s'écrit dorénavant :

$$A^* = A + DL$$

On notera que si A est par hypothèse une matrice carrée de format $k \times k$, DL est bien une matrice carrée de même format dont chaque élément représente le produit de la i^e ligne par la j^e colonne, soit, à titre d'exemple, les quantités de pain (bien i) consommés par les différentes catégories de travailleurs participant à la production du bien j.

b) Compte tenu du système de prix p, le « coût de vie » (*sic*) d'un ménage représentatif s'écrit donc $\sum_i p_i\, d_{hi} = p \,.\, d_h$. En retranchant ce coût de vie du salaire effectif noté s par M.P, on définit, toujours selon la terminologie de Potron les « économies du ménage » $e_h \geq 0$, concept qu'il nous a fallu un peu de temps pour déchiffrer car il ne renvoie à aucun comportement d'épargne explicite. On notera par la suite *e* le vecteur semi-positif représentant les « économies » de l'ensemble des ménages.

c) Par ailleurs, Maurice Potron indique qu'une des conditions pour qu'un régime de prix salaires soit *« effectivement satisfaisant »* est que « le prix de

(13) *Sraffa* [1960], p. 11.
(14) *cf* par exemple G. Abraham-Frois [1995], p. 404.

vente de chaque unité économique soit au moins égale à son prix de revient ». On notera que l'on est dans une logique très éloignée de celle classique de « prix de production » avec exigence d'un taux de profit uniforme dans l'ensemble des branches (15). Ici, l'exigence est moins grande et notera simplement que pour la production de chaque bien le « bénéfice » b_i doit être non négatif, ce qui s'écrit, si on note b le vecteur ligne des bénéfices dans chacune des branches $b \geq 0$.

Selon l'auteur (*op. cit.* p. 7-8), deux conditions doivent être remplies pour qu'un « régime de *prix-salaires* » soit *« effectivement satisfaisant » :*

- *« le salaire effectif de chaque travailleur doit être au moins égal au coût de vie correspondant à sa profession »*
- *« le prix de vente de chaque unité économique doit être au moins égal à son prix de revient »*, ce qui s'écrit, dans le système simplifié présenté ci-dessus :

$$p = A^* + e + b \quad \text{d'où l'on tire : } p(I - A^*) = (e + b)$$

Ce système a-t-il une solution ?

On sait que si la matrice $(I - A^*)$ est productive, *i.e.* si la valeur propre dominante est inférieure à l'unité, elle est inversible et son inverse est strictement positive ; ce qui est bien la condition mise en évidence par M.P. ; d'où le système de prix :

$$p = (e + b)\ (I - A^*)^{-1} > 0$$

Remarques

1) Même si le vecteur $(e + b)$ n'est pas strictement positif (certains des éléments de e et de b peuvent être simultanément nuls), tous les prix sont strictement positifs, puisque la matrice $(I - A^*)^{-1}$ est strictement positive.

2) On notera que Potron n'utilise ici qu'une partie des propositions de Perron-Frobenius ; celles relatives aux caractéristiques du vecteur-propre associé à la valeur propre dominante de la matrice ne sont pas prises en compte (16).

(15) La remarque vaut également pour les salaires puisque, jusqu'en 1935, Potron considérait qu'une même profession pouvait percevoir un salaire différent selon les industries. En 1936, cette particularité disparaît, puisque seule la profession justifie le niveau de salaire. Remarquons également que ces distinctions conduisaient même Potron à considérer que le chômage pouvait être différent selon les secteurs pour une même profession. Ces différences ont pour conséquence de compliquer la notation de Potron. Par exemple, les « économies » d'un travailleur dépendront de son niveau de qualification, de sa structure moyenne de consommation (ou « coût de la vie ») et du niveau de salaire (variable selon les secteurs).

(16) Nous remercions Ch. Bidard de ses critiques et suggestions sur ce point.

3. L'équilibre production-consommation

L'auteur se pose par ailleurs un autre problème, abordé dans sa première conférence, celui de l'« équilibre production-consommation » ; pour simplifier la présentation, on en fera la présentation à partir de l'écriture présentée de la matrice socio-technique. En continuant à noter y le vecteur des demandes finales, il vient cette fois :

$$x = A^* x + y$$

soit compte tenu de la structure de $A^* = A + DL$, on a :

$$x = (A + DL)x + y = Ax + DLx + y$$

La production totale a donc ici trois utilisations : les consommations intermédiaires Ax, la demande finale provenant des travailleurs, et d'autres éléments de la demande finale qu'il convient de préciser.

Dans la présentation de l'auteur, apparaissent plusieurs autres particularités. S'il n'y a pas de demande de biens aux fins d'investissement, d'accumulation, par contre apparaissent deux éléments : la surproduction de marchandises (Potron [1936a], p. 5, équation 5) notée f_i pour le bien (i) et d'autre part une demande finale provenant à la fois des chômeurs et des heures supplémentaires (17) que l'on peut noter q_i, ce que l'auteur désigne par « coûts de vie des non-travailleurs ». On a ainsi, avec des notations transparentes :

$$y = f + q$$

Il est clair que l'équilibre production consommation, pour avoir une solution, nécessite que le vecteur de production x soit positif. Or, si $(I - A^*)$ est inversible, son inverse est strictement positif :

$$(I - A^*)x = y = f + q \Rightarrow x = (I - A^*)^{-1} y > 0$$

On a ainsi la réponse à la question que se pose M.P. dans les premières lignes de sa première conférence de 1936. Citons :

> « Un aspect mathématique du problème de l'équilibre entre la production et la consommation, un niveau de vie déterminé étant attribué à chaque profession. Comment et pourquoi se pose une condition de possibilité ? »

(17) Potron [1936a], p. 9 et 29, équation 14. Relevons que Potron définit cette variable comme le solde du nombre d'heures « normales » travaillées par an et le nombre d'heures requis pour la production annuelle. Ce solde peut donc être positif (chômage) ou négatif (heures supplémentaires) (*ibid.*, p. 5, équation 4).

4. Une certaine vision de la « dualité »

C'est un des apports de M.P que d'avoir montré qu'il y avait en quelque sorte « dualité » en ce sens que les deux questions, celle relative à l'équilibre production-consommation, et celle relative à l'ajustement des prix et des salaires renvoyaient à la même condition, l'existence d'une valeur propre de la matrice A* inférieure à l'unité. Cette idée largement développée par la suite est présente dès les communications de 1913.

Un résultat annexe est mis en évidence : « *En l'absence de tout excédent de production*, signale M.P ([1936], p. 9), *la somme des bénéfices des entreprises et des économies des travailleurs représente exactement le total des coûts de vie des non-travailleurs* » (18). Ceci découle des deux séries d'équations ci-dessus

On en effet d'une part : $p = pA^* + e + b$ et d'autre part : $x = A^* x + f + q$.

Si on post-multiplie la première série d'équation déterminant le vecteur (ligne) des prix par le vecteur (colonne) des niveaux de production et d'activité, il vient :

$$px = pA^* x + ex + bx$$

Si par ailleurs, on prémultiplie la deuxième séries d'équations déterminant le vecteur (colonne) des niveaux de production et d'activité par le vecteur (ligne) des prix, il vient :

$$px = pA^* x + pf + pq$$

D'où à l'évidence : $ex + bx = pf + pq$.

Si on suppose l'absence de tout excédent de production, le vecteur f est donc nul soit $f = 0$; on vérifie bien que la somme des bénéfices des entreprises $bx = \sum b_i x_i$ et des économies de travailleurs $ex = \sum e_i x_i$ représente exactement le total des « coûts de vie des non-travailleurs » $pq = \sum p_i q_i$.

L'auteur envisage un peu plus loin le cas où apparaissent des excédents de production, « en vue, par exemple, précise-t-il p. 31, de l'équipement d'une industrie nouvelle » ; il ajoute, montrant par là qu'il a bien en tête une représentation en termes d'équilibre général :

> « On voit dans tous les cas, *que les dépenses qu'a entraînées la production des excédents*, de quelque manière qu'elles aient été financées, *se retrouvent intégralement sous forme d'accroissement des bénéfices des entreprises et des gains des travailleurs* » (*op. cit.* p. 32).

Par ailleurs, le problème de la surproduction est également au cœur des préoccupations de Potron : « la somme des bénéfices réalisés et des économies des travailleurs surpasse le coût de vie des non-travailleurs ; mais la

(18) *cf.* également Potron [1935], p. 65 et [1911b], p. 2.

différence représente exactement le prix-coûtant des marchandises surproduites » (Potron [1935], p. 65). Ce propos peut être éclairé par la formulation proposée ci-dessus ; si le vecteur *f* est semi-positif, il vient :

$$ex + bx - pq = pf$$

5. Des démonstrations qui remontent à 1911...

Si la présentation qui précède s'est appuyée pour l'essentiel sur les développements qui figurent dans la conférence de 1936, il faut souligner que la quasi-totalité de ces résultats est déjà présente dès 1911 et qu'on les trouve en fait largement développés dans la contribution de 1913 ; c'est dans deux communications à l'Académie des Sciences que l'on peut notamment trouver la définition du problème. Évidemment le vocabulaire peut poser problème ; les termes de « régime satisfaisant », de « régime simplement satisfaisant » et de « régime effectivement satisfaisant » semblent curieux, mais les concepts sont clairs et les résultats sans ambiguïté. Citons (les italiques sont de l'auteur) :

> « Si alors on cherche à établir :
> Soit 1° un *régime satisfaisant de production et travail*, c'est-à-dire *tel que la production soit égale à la consommation et que tout travailleur ait son repos normal* ;
> Soit 2° un *régime simplement satisfaisant de prix et salaires*, c'est-à-dire *tel que tout prix d'échange soit au moins égal au prix coûtant, et tout salaire maximum annuel (correspondant au maximum de travail), au coût de vie annuel* ;
> Soit 3° un *régime effectivement satisfaisant de prix et salaires*, c'est-à-dire *tel que tout prix d'échange soit au moins égal au prix coûtant, et tout salaire effectif annuel (correspondant au travail nécessaire pour que la production soit égal à la consommation) au coût de vie annuel* » (Potron [1911b]).

Quelles sont les conditions de résolution de ces trois problèmes ? L'auteur montre que la condition est la même, savoir l'existence d'une valeur propre dominante de la matrice adéquate inférieure à l'unité.

Deux points doivent en outre être soulignés :

a) A différentes reprises, Potron insiste sur le fait qu'il y a des inconnues « principales » et des inconnues « secondaires » (Potron [1913], [1935]). Ainsi en est-il lorsqu'il envisage le cas d'un système productif (valeur propre dominante inférieure à l'unité). Dans un tel cas,

> « il existe toujours un régime satisfaisant de production et travail, dans lequel, la production demeurant égale à la consommation, on peut se donner arbitrairement les nombres de simples consommateurs de chaque catégorie sociale, et le chômage collectif de chaque catégorie de

travailleurs. En même temps, il existe toujours un système simplement satisfaisant de prix et salaires, dans lequel on peut se donner arbitrairement les bénéfices des entreprises et les économies des travailleurs » (Potron [1913], p. 68).

Ou encore, en 1935 :

« En somme, tout le mal vient de la méconnaissance de cette distinction entre inconnues principales et inconnues secondaires. Les mathématiques disent : si une certaine condition est remplie par vos exigences de train de vie... et l'état de votre industrie, la condition « racine caractéristique < 1 », vous pouvez donner à *toutes les inconnues secondaires* des valeurs *absolument arbitraires* ; il en résultera, pour les inconnues principales, des valeurs positives telles que tout aille au mieux. mais vous ne pouvez donner aux inconnues principales des valeurs *absolument arbitraires* telles que tout aille bien. Malgré cet avertissement, on s'obstine à donner aux inconnues principales, parce que c'est plus facile, des valeurs arbitraires. Il y a bien des chances pour que l'on ne tombe pas sur des combinaisons favorables » (Potron [1935], p. 64).

Ceci renvoie largement, nous semble-t-il, à la distinction entre variables endogènes et variables exogènes. Ceci renvoie également à certains des thèmes développés par P. Sraffa et ses successeurs ; on peut en effet montrer que, sauf cas exceptionnel, on ne dispose pour déterminer un système de prix de production avec salaire et taux de profit positif que d'un seul degré de liberté, le salaire *ou* le profit ; l'une *ou* l'autre de ces deux variables. Par contre, il est (en général) exclu de pouvoir fixer simultanément, de façon exogène, les deux variables ; c'est bien un point de vue semblable qui est développé dans le texte cité ci-dessus.

b) Par ailleurs, Potron décrit bien les caractéristiques d'un régime où la valeur propre dominante est simplement égale à l'unité, régime qui sera qualifié par Sraffa de « Production de subsistance » dans le chapitre 1 de « Production de marchandises par des marchandises » ; il montre que *« en général, il ne peut y avoir ni bénéfices pour les entreprises, ni économies pour les travailleurs »*.

Il ajoute d'ailleurs que des exceptions peuvent apparaître si les matrices sont « partiellement réduites », ce qui semble signifier, d'après le contexte, décomposables.

6. Une esquisse dynamique

Potron a conscience du caractère statique de sa représentation des problèmes. C'est pourquoi il entend introduire, brièvement, une esquisse de ce que serait une analyse dynamique des problèmes économiques. C'est peut-être sur ce chapitre que les travaux de Potron ont le plus évolué au cours des années.

En 1913, le problème se pose avant tout en termes démographiques. Que devient l'équilibre lorsque la population s'accroît ? Ainsi :

« Examinons ce que deviennent ces résultats si l'on tient compte de l'accroissement continu de la population, lequel entraîne un accroissement continu de la consommation et par suite de la production. Nous ferons l'hypothèse que *l'accroissement de la population ne change pas la proportion suivant laquelle les travailleurs ainsi que les simples consommateurs se répartissent dans les diverses catégories* » (Potron [1913], p. 73).

La solution avancée par Potron consiste simplement à associer une fonction F(t) « monodrome *(sic)*, finie, continue, positive et croissante » à toutes les variables démographiques. Ainsi, le nombre total des consommateurs de catégorie h (Π_h dans la notation de Potron) s'accroît de Π_h dF(t). Cet accroissement démographique doit entraîner une augmentation proportionnelle de la consommation, reposant ainsi la question de savoir s'il est possible d'envisager un régime satisfaisant de production-consommation et prix-salaires au cours du temps. La réponse est évidemment positive, puisque Potron n'introduit pas une réelle dimension dynamique dans le comportement des variables.

« Ainsi, *pourvu que la répartition de la population ne change pas, les relations obtenues en tenant compte de son accroissement continu ne diffèrent pas de celles obtenues en la supposant constante. Les résultats des n° 15 et 16 subsistent donc tous* » (Potron [1913], p. 75-6).

Les conditions sont donc les mêmes en dynamique et en statique, pour Potron.

Dans les années trente, l'ajustement dynamique de l'économie devient problématique, pour Potron, notamment en raison des modifications des coefficients techniques. Théoriquement, le progrès technique doit permettre d'améliorer la situation collective. Citons :

« [u]n *vrai progrès* doit se traduire par une diminution de la racine maximale r, ce qui doit permettre, soit une diminution du travail, soit une élévation des niveaux de vie. » (Potron [1936a], p. 33).

Dans la pratique, cette modification incessante des conditions de production a pour conséquence de perturber l'équilibre économique et d'amenuiser considérablement les chances d'obtenir un régime satisfaisant. La raison principale tient à l'absence de lois régissant automatiquement le système économique :

« [c]haque entreprise P connaît assez bien ses propres c_{ik} [consommation intermédiaires] et t_{ih} [temps de travail nécessaire à la production]. Mais il n'y a personne pour former et résoudre le système [1] [qui répartit les quantités produites entre consommation intermédiaire, consommation finale et « surplus »]. Chacun prend son d_i [les quantités produites] au petit bonheur, et l'on est tout surpris d'avoir d'énormes F_i [« surplus »], qui supposent un grand chômage ou une forte surproduction ou, au contraire, on tombe sur des F_i négatifs, ce qui n'est pas moins désastreux » (Potron [1935], p. 64).

Potron arrive ainsi à la conclusion qu'en l'absence de mécanisme autorégulateur, l'équilibre économique est « improbable », même s'il est logiquement possible.

« Cela explique en partie pourquoi les progrès techniques, qui devraient procurer aux hommes plus de bien-être pour un moindre travail total, sont souvent au contraire cause de misères et de ruines » (*idem.*, p. 64).

La seule manière rationnelle d'arriver à résoudre ce problème serait, affirme-t-il, de calculer directement la solution de ces systèmes d'équations, ce qui est impossible en raison du « nombre immense de ces équations » (*ibid.*, p. 65). Nous y reviendrons. Relevons ici que si l'introduction de la dynamique rend hautement improbable l'équilibre économique, ses conditions d'existence n'en sont pour autant pas altérée. Tout comme en 1913, les conditions de la statiques prévalent en dynamique.

7. Le premier Tableau Entrées-Sorties avant Leontief

Pour Potron, les résultats de ses travaux ne sont pas simplement d'ordre théorique. Ils ont une visée sociale explicite. Cette dernière apparaît dans la problématique de recherche dans laquelle s'inscrit Potron : il s'agit, comme on l'a évoqué, de *« donner aux prix et salaires des valeurs telles que les deux principes du droit à la vie et de la justice dans l'échange soient observés »* (Potron [1912], p. 301). Or, cette justice et ce « droit à la vie » supposent de respecter des conditions mathématiques assez strictes. Il faut d'abord respecter des conditions élémentaires :

« pour chaque objet, le prix de vente soit au moins égal au prix coûtant et que, pour chaque travailleur supposé menant une existence convenant à sa catégorie, le salaire soit au moins égal au coût de la vie, lequel dépend précisément des prix de divers objets » (Potron [1913], p. 53).

Puis, la mise en équation du problème permet de trouver, comme on l'a vu, des conditions mathématiques supplémentaires qui montrent que l'économie n'atteint pas forcément ou spontanément un « régime satisfaisant de production-consommation et prix-salaire ». Pour savoir quoi faire et comment intervenir pour respecter le droit à la vie et la justice dans l'échange, l'État doit envisager la constitution d'un « Bureau des Calculs » qui se chargerait de collecter les renseignements afin de caractériser l'« état économico-social ». Ce bureau serait ainsi à même de connaître les « coûts de la vie » des différentes catégories de consommateurs et les fonctions de production des entreprises. La démarche à suivre serait alors la suivante :

« [o]n pourrait même, pour simplifier, faire deux enquêtes successives.
Dans la première, uniquement qualitative, pour ainsi dire, il serait seulement demandé, à tout établissement industriel ou commercial, de fournir :
1° La nomenclature des produits qu'il livre et des opérations dont il se charge ; en un mot, son « catalogue » ;
2° Pour chaque article de ce catalogue, la nomenclature de tout (matières, opérations effectuées par des établissements étrangers, matériel,

main d'œuvre) ce qui sert à la fabrication spéciale de cet article ;

3° La nomenclature de tout (comme précédemment) ce qui sert de façon indivise à la marche générale de tout ou partie de l'établissement, et par suite, de façon indirecte, aux fabrication spéciales de plusieurs articles.

Cette première enquête montrerait déjà, d'une façon nette et précise, l'interdépendance des divers établissements industriels et commerciaux, des divers résultats de travail. Elle déterminerait le nombre des formules à établir et préciserait, pour chacune d'elles, les coefficients à calculer, puisqu'elle dirait quels résultats de travail, quelles catégories de main d'œuvre sont nécessaires à la production de tel résultat de travail.

Elle aiderait aussi beaucoup l'industriel ou le commerçant à comprendre exactement ce que lui demanderait la deuxième enquête, celle-là quantitative : quelles quantités de ces divers résultats de travail, de ces divers genres de main d'œuvre, précisés par la première enquête, sont nécessaires à la production de telle quantité de tel résultat de travail » (Potron [1912], p. 315-6).

A travers ces enquêtes, on s'aperçoit que Potron propose ni plus ni moins que de réaliser l'ancêtre du fameux Tableau Entrées-Sorties utilisé dans notre système actuel de comptabilité nationale. Les coefficients auxquels aboutiraient ces enquêtes sont d'ailleurs supposés constants :

« [t]ous ces coefficients dépendent exclusivement des conditions industrielles techniques des diverses entreprises : procédés de fabrication, conditions d'installation, etc. *Ils sont invariables tant que ces conditions ne changent pas* » (*ibid.*, p. 294).

Pour autant, Potron ne propose pas de se servir du calcul matriciel pour connaître les moyens à mettre en œuvre pour parvenir à un état économico-social juste. Pour lui, le calcul a seulement une valeur indicative permettant de diagnostiquer l'existence ou non d'un malaise :

« Le calcul ne saurait indiquer les mesures qu'il convient de prendre pour réaliser ces modifications. Ce sont questions où la liberté humaine entre en jeu et qui sont du ressort de la science économique pure. Le calcul peut seulement, en présence d'un état de malaise économique, diagnostiquer pour ainsi dire avec précision, par la détermination du nombre caractéristique, la cause du mal. En indiquant que le mal tient à l'état économico-social lui-même, le calcul préviendra bien des tentatives inefficaces et ruineuses. Après avoir, au contraire, constaté que l'état économico-social général est sain, le calcul peut *indiquer* les modifications à faire aux régimes de production et travail, de prix et salaires, modifications *certainement efficaces* pour faire cesser le malaise » (Potron [1912], p. 310).

Ces calculs permettraient pourtant de montrer comment une modification de la répartition des revenus pourrait débloquer une situation de sous-emploi des ressources dans un contexte de réduction du temps de travail :

« L'industrie pourrait sûrement produire de quoi satisfaire à tous les désirs des consommateurs, malgré la diminution de N (journée de 8 heures). Il y a eu sans doute surproduction d'objets inutiles. Ils restent

chez leurs producteurs ; l'argent qui représente leur valeur (formule 11) dort dans les banques ou a perdu sa valeur par suite de diverses manipulations. Il n'est pas allé à ceux qui en auraient besoin pour acheter des objets de première nécessité » (Potron [1935], p. 65).

Afin de démontrer la faisabilité de ces enquêtes, Potron propose une étude détaillée des coûts supportés par son boulanger pour produire un pain de deux kilogrammes (*ibid.*, p. 297-9).

« Le prix de revient d'un pain de deux kilogrammes, dans les conditions où il est fabriqué par cette boulangerie, est la somme de certaines fractions des prix des locaux, des appareils de fabrication, des matières et de la main d'œuvre servant à la confectionner. Le tableau ci-dessous donne la fraction correspondant à chacun de ces articles, autrement dit le coefficient par lequel est multiplié le prix de cet article dans la formule du prix de revient du pain de deux kilogrammes » (*ibid.*, p. 296).

La formule comprend 73 postes que Potron regroupe en cinq rubriques : locaux, matériel, matières, main d'œuvre, services divers. En voici quelques éléments (*ibid.*, p. 297-299) :

N° d'ordre	Articles utilisés	Coefficients
	Locaux	
1	La location annuelle d'un local	1/100 000
	Matériel	
2	Une bascule pour peser les sacs de farine (150 kg)	1/2 000 000
3	Un monte-charges	1/5 000 000
4	Un mètre de câble pour monte-charges	7/50 000
5	Une bluterie	1/5 000 000
	[...]	
	Matières	
56	Le sac de farine de 150 kg	1/100
57	Le kiligramme de sel	1/40
	[...]	[...]
	Main d'œuvre	
64–67	[...]	[...]
	Services divers	
	[...]	[...]

En étendant cette enquête à toutes les autres industries, il deviendrait possible de calculer le régime effectivement satisfaisant de production-consommation et de prix-salaires.

En 1912-1913, ces enquêtes restent du domaine du souhaitable, pour Potron. Dans les années trente, elles deviennent absolument nécessaires, car sans cet effort de calcul,

« la probabilité pour que l'on tombe par hasard sur un régime satisfaisant de production prix et salaires est tellement faible que la rencontre d'un tel régime est à peu près impossible » (Potron [1935], 65).

L'existence d'un bureau des calculs constituerait donc le seul moyen de parvenir à un régime satisfaisant permettant de respecter justice et droit à la vie. Mais la tâche s'avère colossale, comme en convient Potron lui-même.

« La valeur du nombre n des unités économiques peut être estimée à 10^6 au moins. Les calculs nécessaires pour la résolution complète des systèmes (9) et (10) sont donc pratiquement inabordables, et ce n'est que par tâtonnements que l'on peut en trouver une solution » (Potron [1936a], p. 32) (19).

La seule solution consisterait à mettre en œuvre le plus rapidement possible ces calculs afin de parvenir, dans les années à venir, à l'équilibre :

« [s]i l'on avait commencé ces calculs il y a quelque mille ans, il y avait alors beaucoup moins d'équations. Les retouches nécessitées par chaque nouvelle invention sont en somme peu de chose. Quelques coefficients seulement sont modifiés. On aurait le temps d'achever les calculs avant sa mise en service » (Potron [1935], 65).

L'effort le plus important devrait donc être fourni dès le départ.

« L'important est donc d'arriver à construire et à réaliser, *une première fois*, un double régime satisfaisant » (Potron [1936a], p. 34).

Cet effort doit être accompli, affirme Potron, car il permettrait *« la réalisation progressive d'un ordre économique conforme au plan général que Dieu a tracé, mais dont Il laisse aux hommes le soin d'assurer l'exécution »* (Potron [1912], p. 316).

Ainsi, le souci de faire respecter la justice dans l'échange et le droit à la vie conduit Potron à proposer la première matrice de Leontief plus de vingt ans avant Leontief et de s'en servir pour élaborer l'ancêtre des TES utilisés dans le système actuel de comptabilité nationale.

8. Comment Potron vint à l'économie

Comment Potron en est-il venu à appliquer le théorème de Perron-Frobenius à une représentation matricielle de l'économie ? La question mé-

(19) Il est frappant de voir apparaître le concept walrassien de « tâtonnement » dans l'œuvre de Potron, même si rien n'indique qu'il s'agisse d'une référence explicite. Relevons ici que ce terme employé par Potron apparaît au moment même où O. Lange [1936-7] le mobilise dans le débat sur la rationalité du calcul économique en régime socialiste. De plus, Potron, comme Lange, semble considérer que le tâtonnement constitue le seul moyen pour contourner le problème de la résolution effective des équations économiques (Lendjel [1998], p. 250-251). Enfin, on retrouve explicitement la distinction établie par Walras entre la résolution théorique du système d'équation par le théoricien et sa résolution pratique ou effective par le marché : « Nous avons pu énoncer la condition de possibilité du problème, et indiquer un procédé *théorique* permettant de reconnaître si elle est vérifiée. [...] Mais la seule longueur des calculs nous arrête, et nous oblige à procéder par tâtonnements » (Potron [1936a], p. 34).

rite d'être posée, puisque l'auteur n'est pas un économiste de formation et qu'il ne mentionne aucun écrit économique dans toute son œuvre, à l'exception des deux articles de Desbuquois [1911] et de Zamanski [1911] sur lesquels nous reviendrons, et celui de Frisch mentionné dans sa lettre à Gibrat en 1935 et publié dans le bulletin de X-Crise. Qu'est-ce qui le conduit à s'intéresser aussi tôt au théorème de Perron-Frobénius et à l'utiliser deux ans seulement après sa publication en 1909 ? Ces questions trouvent quelques éléments de réponse lorsque l'on examine sa biographie et le contexte intellectuel dans lequel évolue Maurice Potron.

Comme évoqué précédemment (20), Maurice Marie Jean Potron, né à Paris le 31 mai 1872 et mort le 21 janvier 1942, fut polytechnicien (de 1890 à 1892), docteur ès mathématiques (thèse soutenue en 1904), prêtre (ordonné en 1905) et jésuite (21). Ses activités d'enseignement et de recherche portèrent avant tout sur les mathématiques, principalement la théorie des groupes finis qui fit l'objet de sa thèse et de la majeure partie de ses publications (Potron [1904a], [1904b], [1931], [1933], [1936b], [1938], [1940]).

Ce thème de recherche explique vraisemblablement l'intérêt que porte Potron aux travaux de Frobenius. En effet, ce dernier a consacré ses propres recherches à la théorie des groupes finis dès la fin du XIXe siècle (1896) avant de publier l'article de 1908-9. Les liens entre Potron et Frobenius ne sont donc pas surprenants au regard de la proximité de leurs travaux de recherche. Du côté de l'économie, par contre, on ne trouve aucun rapprochement de ce type entre les travaux de Potron et ceux des économistes de son époque. La trajectoire qui l'a conduit à s'intéresser à l'économie est donc autrement plus complexe.

8.1. Le poids de la formation polytechnicienne

La première piste à suivre — la plus évidente — est celle de l'École polytechnique. Trois éléments apparaissent lorsque l'on s'engage sur cette piste.

Tout d'abord, l'intérêt de Potron pour l'économie ne peut provenir de l'enseignement qu'il a reçu au sein de l'École. En effet, la discipline n'est pas enseignée avant le début du XXe siècle, puisque il faut attendre 1906 pour qu'Eugène-Joseph Fournière entame officiellement son cours d'économie politique et sociale (22). Et même à partir du moment où elle fut enseignée, la discipline

> « était considéré comme secondaire, cette opinion étant partagée par les responsables de l'École, et la grande majorité des élèves » (Etner [1978], p. 176).

On peut ensuite évoquer la réflexion économique existant depuis longtemps dans le corps des Ponts et Chaussées (depuis Louis Navier et surtout

(20) Cette biographie complète celle développée dans Lendjel [2000].
(21) Potron entre à la Compagnie de Jésus en 1893 et termine ses études théologiques (signalé par le « quatrième vœux ») en 1922.
(22) Les premières conférences archivées par l'École remonte à 1904.

Jules Dupuit), sur la tarification dans les transports. Selon cette approche, on tentait de déterminer un « juste prix » du transport permettant à la fois de couvrir l'ensemble des coûts de production et de faire payer chaque utilisateur (ou marchandise) en fonction de sa catégorie sociale et de son trajet (Porter [1995], p. 196). Mais, ces travaux relèvent du calcul microéconomique et non de la macroéconomie. Ils ne peuvent expliquer l'intérêt de Potron pour les problèmes macroéconomiques.

En revanche, la piste polytechnicienne constitue un facteur de poids pour expliquer l'approche formalisatrice menée par Potron. La démarche scientifique usuelle consiste, pour un polytechnicien, de par sa formation, à traduire un problème sous sa forme mathématique pour pouvoir le résoudre (Belhoste *et al.* (eds.) [1994], Belhoste *et al.* (eds.) [1995], Armatte [1997]). Cette démarche est clairement exprimée par Le Chatelier en 1924, lors d'un débat sur l'avenir de l'École :

> « Le but essentiel de la Science est la connaissance des lois de la nature, c'est-à-dire des relations numériques qui rattachent entre elles les grandeurs des divers phénomènes ; or, aucune relation semblable ne peut être établie si elle n'est précédée de la mesure des grandeurs à relier par des formules algébriques. [...] De même en physique, la science des radiations ; en économie politique, les sciences sociales ne sortiront des limites où elles sont enveloppées aujourd'hui, que lorsque, par une division convenable, on aura mis en évidence des grandeurs mesurables » (Le Chatelier [1924], p. 11-16).

La science ne peut produire de la connaissance qu'en produisant des grandeurs mesurables que l'on relie par des formules mathématiques. On retrouvera cette position dans le débat méthodologique au sein du groupe X-Crise, dans les années trente, position qui produira les premiers modèles macro-économiques français (Fischman et Lendjel [2000a]) et impliquera X-Crise dans l'émergence de l'économétrie en France (Fischman et Lendjel [2000b]).

Potron lui-même n'est pas en reste sur ce point. Polytechnicien et mathématicien, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il adopte cette position. Il la revendique dès 1912 lors de l'exposé des problèmes économiques qu'il souhaite traiter :

> « Or tout le monde pressent, au moins confusément, que l'application de ces deux principes [du droit à la vie et de la justice dans l'échange] pourra bien faire surgir entre eux quelque opposition. [...] A tous il apparaît que cette difficulté est d'ordre mathématique ; [...] Il me semble que, puisque cette difficulté est d'ordre mathématique, elle appelle des recherches de même ordre, et qu'il faut d'abord, comme on dit, mettre le problème en équations. Or, et c'est là ce qui peut faire l'intérêt de ce travail, il n'y a pas à chercher bien loin ces équations ; elles ont, pour ainsi dire, une existence concrète, ce sont les égalités entre prix, salaires, bénéfices, économies, qui *figurent de fait sur les livres de comptes des industriels, commerçants, maîtresses de maisons, ménagères.* Quant aux principes du salaire minimum vital et du prix rémunérateur, il est aisé de les traduire immédiatement par des inégalités que doivent vérifier les diverses quantités déjà liées par les égalités considérées » (Potron [1912], p. 290).

Potron conclut l'exposé des problèmes à traiter en signalant que, par « une curieuse coïncidence », les outils mathématiques pour les résoudre sont disponibles :

> « existe-t-il des quantités qui vérifient *à la fois* les unes et les autres ? Tel est, sous sa forme mathématique, le problème à résoudre. On voit qu'*il se pose, pour ainsi dire, de lui-même, et d'une façon absolument naturelle et nécessaire.* Par une curieuse coïncidence, il m'a suffi, pour en obtenir la solution, d'utiliser, en les complétant, des résultats, d'ordre purement théorique et abstrait, récemment obtenus (en [1908] et [1909]) par deux mathématiciens, l'un suédois, M. Perron, l'autre allemand, M. Frobenius » (Potron [1912], p. 291).

Outre la démarche formalisatrice propre à la conception polytechnicienne de la science, c'est la correspondance entre les caractéristiques propres de l'objet économique étudié et celles des mathématiques maîtrisées par Potron qui favorisent la formalisation. Tout comme Walras justifiait la mathématisation de l'économie par le caractère quantitatif de la valeur d'échange, c'est le caractère mathématique du double problème du salaire minimum vital et du prix rémunérateur qui impose de façon « naturelle et nécessaire » un traitement mathématique, pour Potron.

Pour autant, la piste polytechnicienne n'explique pas les raisons qui incitèrent Potron à se pencher sur l'économie. Si ces raisons ne se trouvent pas à polytechnique, elle se situent nécessairement dans un autre environnement intellectuel dans lequel se trouve l'auteur.

8.2. La prégnance de la pensée scolastique dans les écrits économiques de Potron

Au regard de son engagement religieux se manifestant à travers sa formation de jésuite, ses écrits, sa correspondance et les institutions qu'il a fréquenté, il semble probable que Potron ait été réceptif à la doctrine sociale de l'Église qui se diffuse en France dans cette période. L'Église a en effet défini sa position sociale à travers l'encyclique *Rerum novarum* sur « la Condition des ouvriers », publiée par Léon XIII en 1891 (Ledure [1991]) (23). Cette encyclique reprend, pour l'essentiel, la doctrine scolastique que l'Église avait déjà officialisée en 1879 avec l'encyclique *Aeterni patris* (Schumpeter [1954], III, p. 40). Enfin, une troisième encyclique, *Pascendi*, publiée en 1907 par Pie X, entendait relancer cette doctrine, au regard de son faible impact sur la société laïque. En effet, de l'aveu même du directeur de rédaction de la revue l'*Association catholique, Revue du mouvement catholique social*, Henri Savatier, « [I]l faut bien reconnaître que ces avis [les encycliques], accueillis d'abord avec respect [dans la société laïque], furent dans la suite peu écoutés » (Savatier [1908], p. 10). Il semble donc plausible, au regard de ce reproche, que certains jésuites aient voulu donner de la

(23) On considère généralement que cette encyclique consacre le retour de l'Église dans le champ social délaissé depuis la Révolution française.

chair et davantage de consistance à cette doctrine. Or, la doctrine scolastique est pour ainsi dire la seule référence théorique explicitement présente dès les premiers écrits économiques de Potron.

En 1912, la notion scolastique de « juste prix » structure pratiquement tous les développements théoriques de l'auteur, à commencer par son titre « Possibilité et détermination du juste prix et du juste salaire ». Potron rapproche ainsi les résultats de ses travaux avec ceux de la doctrine sociale de l'Église :

> « [i]l y a, me semble-t-il, une grande analogie entre le prix théorique de chaque objet, ainsi déterminé comme élément d'un régime d'équilibre, et le « juste prix » de la doctrine scolastique. Le prix théorique, *élément d'un régime effectivement satisfaisant de prix et salaires*, assure en effet, dans les contrats de travail et les contrats d'échange, le respect des principes supérieurs de la justice et du droit à la vie. *Ce prix théorique n'est d'ailleurs qu'une moyenne*, autour de laquelle le prix réel, le prix courant, peut osciller, sans que le régime cesse d'être satisfaisant, dans des limites qu'il serait possible de déterminer. [...] Cette notion de *prix théorique, élément d'un régime effectivement satisfaisant de prix et salaires*, renferme donc tous les éléments essentiels de la notion scolastique de « juste prix » ; elle y ajoute ou au moins y fait ressortir la note de relativité, qui la précise singulièrement, et *en rend possible une détermination pratique* » (Potron [1912], p. 313-4).

Les travaux de Potron apparaissent alors comme une tentative pour donner un contenu précis à la doctrine scolastique, tout comme s'il en ressentait la nécessité d'en clarifier le contenu. A travers son application des mathématiques aux conceptions scolastiques de l'économie, les notions « supérieures » de justice et de droit à la vie acquièrent une consistance théorique. Relevons également que, non content d'être des « principes supérieurs », ces concepts ont également une dimension « pratique » qui, semble-t-il, leur faisait jusqu'alors défaut. Potron se réfère ici implicitement aux développements du Père Desbuquois à propos du juste prix fixé par l'*aestimatio communis*, l'évaluation commune (Desbuqois [1911], p. 873).

On peut également relever un deuxième indice textuel relatif au rôle de la doctrine scolastique. Potron assimile en effet l'ensemble des biens et services à des « résultat de travail ». Ainsi,

> « [u]n *résultat de travail* sera, soit une transformation ou production proprement dite, soit un déplacement ou transport, soit, plus généralement, un *service* (de surveillance, de sécurité, comme ceux que rendent les administrations publiques, les compagnies d'assurances, etc.). Pour obtenir tel *résultat de travail*, il faut, d'une part, tel travail de telle ou telle nature (main-d'œuvre), et, d'autre part, l'usage ou la consommation de tels et tels résultats de travail (matières premières, machines, etc.) » (Potron [1913], p. 63).

Or, l'axe central du développement de la doctrine sociale de l'Église à cette époque repose précisément sur la valorisation du travail. Paul Droulers,

historien de la doctrine sociale de l'Église, mentionne ainsi à propos de l'Action Populaire (catholique), mouvance à laquelle appartient Potron (24) :

> « [à] la base est placée l'idée simple, évidente, philosophique aussi, que : *l'homme est fait pour le travail* » (Droulers [1969], p. 196).

Le travail constitue donc le prisme philosophique de la doctrine sociale de l'Église. En réduisant l'ensemble des biens et services au seul travail, Potron entreprend de valoriser le travail afin d'en favoriser la juste rémunération. En cela, Potron ne se rapproche pas tant de Marx que de la doctrine sociale de l'Église.

L'objectif de Potron est donc clairement d'aider la diffusion de la doctrine sociale de l'Église à travers une clarification de ses concepts tout en leur donnant une dimension pratique ou opérationnelle.

8.3. Le rôle catalyseur de Zamanski

En somme, le problème Potron peut être ramené à une équation chimique simple. On a d'abord un mathématicien, polytechnicien de surcroît, qui s'engage dans le christianisme au point de devenir jésuite. On a ensuite l'Église qui, à travers ses encycliques successives, tente d'intervenir dans le débat social en s'appuyant sur la doctrine scolastique. Il ne reste plus qu'à trouver le facteur qui rassemble ces deux éléments et conduit Potron à avoir l'idée d'appliquer les mathématiques à la conception scolastique de l'économie prônée par l'Église. Potron, qui est conscient du caractère novateur de sa démarche, semble témoigner sur ce point d'une dette à l'égard des travaux de Joseph Zamanski, collaborateur de Desbuquois à l'Action Populaire (Droulers [1969], p. 215).

Lorsque l'on examine les contributions de Zamanski mentionnées par Potron (Zamanski [1908], [1911]), on constate que l'auteur semble principalement intéressé par la question des salaires et de leurs insuffisances pour assurer la survie des ouvriers. Mais aucune équation n'apparaît dans ces articles, ni aucune mention d'un quelconque recours aux mathématiques pour traiter ces problèmes. Seules les statistiques et l'importance attachée aux grandeurs relatives (salaires et prix des biens) témoignent de son souci pour la recherche d'une cohérence quantitative.

Dans l'article de 1908 (« A propos du coût de la vie »), deux points intéressants peuvent tout de même être relevés dans le cadre de notre enquête. Tout d'abord, à la différence de Potron, Zamanski connaît et cite les économistes de son temps : de Molinari, Jules Domergue (directeur de la *Revue Économique*) et Paul Leroy-Beaulieu (Zamanski [1908], p. 30-31). Il est donc familier des écrits économiques et, de ce fait, est plus à même de connaître les travaux fondateurs de l'économie mathématique que Potron. Ensuite, Zamanski cherche à établir les « causes » du mouvement de hausse des

(24) Paul Droulers est, à notre connaissance, le seul historien à avoir connaissance des travaux de Potron. Voir Droulers [1969], p. 214.

prix. Une fois établies (la cause principale étant la hausse des coûts salariaux provenant des « nouvelles lois sociales »), il entreprend de les défendre contre les libéraux (*idem.*, p. 34-5) au nom de la « justice sociale » en hiérarchisant les intérêts des diverses catégories sociales (salariés, consommateurs, capitalistes). S'emporter contre la hausse des prix, dit-il en effet, c'est privilégier l'intérêt du consommateur sur celui du salarié. Or, l'intérêt de ce dernier lui semble plus important que celui du consommateur, puisque l'homme se réalise plus par son travail que par sa consommation. On retrouve bien là l'esprit de *Rerum novarum* mentionné précédemment. Mais, au delà de cette proximité, l'important réside dans l'insistance de Zamanski à souligner la compatibilité — ou la cohérence quantitative — qui doit s'établir entre les niveaux de prix et de salaires, la production et la consommation. C'est précisément les problèmes auxquels s'attellera Potron afin de montrer mathématiquement que cette compatibilité peut être obtenue.

Le second article de Zamanski (« La crise alimentaire ») cité par Potron traite du même problème que le précédent : la difficulté à trouver un équilibre entre prix et salaires.

La solution proposée en 1911 permet de concilier les intérêts de toutes les catégories sociales. Empruntée à Leroy-Beaulieu, elle repose sur la recherche des gains de productivité :

> « [e]n fait, cette absorption [du coût salarial] se produit, sans perte pour le capital, lorsque par un perfectionnement de l'outillage, le producteur améliore le rendement de son industrie » (Zamanski [1911], p. 933).

Ainsi, le thème récurrent de Zamanski est bien celui de l'adéquation des salaires et des prix, envisagé sous tous ses aspects.

La parenté de ce thème avec ceux développés par Potron est patente, même si Zamanski ne suggère pas explicitement l'idée de recourir aux mathématiques pour les aborder. Citons ainsi Potron qui conclut que, grâce à ses travaux, on peut savoir

> « si le défaut d'équilibre, dont on se plaint souvent, entre le taux des salaires et le coût de la vie, tient seulement à une détermination défectueuse des prix et des salaires ; ou bien si ce défaut d'équilibre ne provient pas de l'impossibilité où se trouve l'industrie, dans son ensemble, de fournir d'une façon continue et habituelle, tout ce que demande l'ensemble des consommateurs » (Potron [191 ?], p. 4).

Il semble donc que le réseau des réformateurs sociaux catholiques et, parmi ses membres, Desbuquois et surtout Zamanski, ait été le vecteur de l'idée de Potron de mobiliser ses connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes d'économie politique.

Pour le montrer, il ne nous reste plus qu'à examiner les éléments de la biographie de Potron qui accréditent son appartenance à ce réseau.

8.4. Le réseau du mouvement social catholique

Au delà de cette référence intellectuelle, il convient ici de souligner l'appartenance de Potron à un réseau, au sens défini par M. Callon (Callon et

Latour (eds.) [1989]), afin d'étayer notre hypothèse. Deux facteurs semblent l'accréditer.

1) Tout d'abord, établissons le lien unissant Potron au mouvement des réformateurs sociaux catholiques. L'intérêt dont témoigne Potron pour les questions sociales, provient probablement, pour une part, d'un autre jésuite, le Père Desbuquois. Ce dernier, qu'il a connu au cours de ses études à l'Institut Catholique de Paris (Droulers [1969], p. 214), est l'un des fondateurs — avec le Père H. Leroy — de l'Action Populaire de Reims en 1906. Cette dernière, issue du renouvellement du militantisme catholique à cette époque, entend participer au débat social français en suivant l'esprit de *Rerum novarum*. Sa brochure-programme, rédigée par Desbuquois, en témoigne (*idem*, p. 196). Elle comporte d'ailleurs un passage consacré à l'importance du pain, passage à rapprocher du seul exemple numérique fourni par Potron sur le coût de fabrication d'un pain de deux kilos. Véritable cerveau de l'Action Populaire (*ibid.*, p.154), Desbuquois publie plusieurs articles au début des années 1910, dont l'un — paru en 1911 dans la revue *Le mouvement social* — comprend un résumé de la contribution de Potron [1913] avant même qu'elle ne soit publiée. Ce lien est renforcé par le fait qu'il est l'un des deux seuls auteurs à être cité par Potron [1912] sur les questions économiques, le second étant Zamanski.

La référence à ce dernier permet de préciser les contours du réseau catholique auquel semble appartenir Potron. En effet, Zamanski est à cette époque le secrétaire de rédaction de la revue l'*Association catholique, revue du mouvement social*, revue qui s'appelera à partir de 1910 *Le mouvement social*. Cette revue, qui a publié les articles de Desbuquois et de Potron, constitue l'organe de communication de « l'Œuvre des Cercles catholiques d'ouvriers », les réformateurs sociaux catholiques. On retrouve ainsi, à travers Zamanski, le mouvement social catholique qui animait l'Action Populaire rémoise et son directeur le Père Desbuquois. A telle enseigne, le directeur de la revue l'*Association catholique* rappelait, dans l'éditorial du 15 janvier 1908, la fidélité de sa revue « à l'Église et à son chef, le pape » pour souligner son adhésion aux grandes encycliques au premier rang desquelles figure *Rerum novarum* (Savatier [1908], p. 9). Il n'est donc pas surprenant de voir Zamanski prendre position, dans cette revue, en faveur des « lois sociales » (25), disserter sur le coût de la vie, la crise alimentaire et le niveau des salaires.

Si l'on tire le fil de ce réseau, on découvre que l'Action Populaire soutiendra la création des éditions S.P.E.S. par Léon Harmel, en 1923, afin de favoriser la diffusion des idées catholiques sur les questions sociales (26). Desbuquois sera même employé au sein de ces éditions afin de contrôler la moralité de leurs publications (27). Cette fonction de directeur du Service de

(25) « Ce sont les lois qui ont limité la durée du travail quotidien et la durée du travail hebdomadaire ; c'est la loi sur les accidents du travail ; ce sont les augmentations successives des salaires ouvriers ; ce sera bientôt la loi sur les retraites » (Zamanski [1908], p. 34).

(26) Dans la correspondance de Desbuquois avec l'évêché, Desbuquois insistera sur la nécessité, pour le mouvement catholique social, de disposer d'un éditeur afin de favoriser la diffusion de la doctrine sociale de l'Église. Voir, sur ce point, le Fonds « Desbuquois » des Archives nationales jésuites.

(27) Voir sur ce point le fond « Potron » des Archives nationales jésuites.

Direction Morale occupée par Desbuquois a son importance, puisqu'il décidait, en dernier ressort, de la publication ou non d'un ouvrage. Il n'est donc pas surprenant de voir que Potron a publié sa seule brochure économique (à l'heure actuelle toujours introuvable) intitulée « les équilibres production-consommation et prix-salaires » chez cet éditeur (28).

Ainsi, Potron semble inséré dans un réseau de catholiques, reliant l'Action populaire, la revue *Le mouvement social* et les éditions S.P.E.S., qui milite en faveur de la diffusion de la doctrine sociale de l'Église telle qu'elle est définie dans les encycliques papales depuis *Rerum novarum.*

2) Le second facteur s'avère familial. Tout d'abord, la mère de Maurice Potron, Jeanne Frottin épouse d'Auguste Potron, fait un don à l'Action Populaire en 1912 afin de l'aider à surmonter ses difficultés financières (Droulers [1969], p. 295). Ensuite, le père de Maurice Potron, Auguste Potron, semble également avoir joué un rôle. Toujours dans la mouvance de *Rerum novarum* s'est créé une association d'ingénieurs catholiques, à peu près à la même époque que l'Action populaire [1906], sous l'impulsion de Henri Pupey Girard [1860-1948]. L'USIC — Union Sociale des Ingénieurs Catholiques — se réunit en effet dans un salon du domicile de la famille Potron (29). Auguste Potron, lui-même ingénieur, fait ainsi partie du comité organisateur de l'USIC et son fils, le « Père Potron », en sera même le secrétaire général pendant un an (1911-1912) (30), l'année même où Potron publie ses premiers écrits économiques. Les réunions, organisées tous les mois, portent généralement sur les questions sociales — organisation du travail, chômage, salaires, prix, etc. —, autant de thèmes investis par la doctrine sociale de l'Église à cette époque. Potron publiera vers 1911 une présentation sommaire de ses travaux dans « l'echo de l'USIC » (31).

Signalons enfin que certains membres d'X-Crise fréquentèrent ces réunions dans les années vingt. C'est le cas de Compaing de la Tour Girard, de Chevalme, de Ziegler ou encore de Loizillon (32).

Au regard de ces éléments, il semble avéré que Potron a fait partie d'un réseau catholique militant autour des questions sociales. C'est donc selon toute probabilité cet environnement qui l'a conduit à s'intéresser à l'économie avec les lunettes de la doctrine sociale de l'Église.

---

(28) Un des premiers ouvrages publiés par les éditions SPES s'intitule *« Juste prix, juste salaire »*, par H. du Passage [1923]. De nombreux autres ouvrages publiés à partir de 1924 par cet éditeur portent d'ailleurs sur l'Encyclique *Rerum Novarum.*

(29) Parmi la nébuleuse de noms d'associations se réunissant dans ce même salon, toujours à l'instigation de H. Pupey Girard, mentionnons « le Cercle Social », « le Cercle Social de Sociologie et d'Apologétique », ou encore « l'Union des Retraites Régionales ». Notons qu'à partir de la fin de l'année 1911, ce salon devient « la salle des ingénieurs catholiques ». A partir des années vingt, le nombre d'associations catholiques siégeant dans ces locaux s'agrandit et l'USIC, qui les regroupe, compte 2400 « membres actifs » en 1923.

(30) Toutes ces informations figurent dans le fond « Potron » des Archives nationales jésuites.

(31) Nous n'avons pas pu établir précisément la date de parution de cet article, pourtant disponible sous forme de tiré-à-part dans le Fond Potron aux archives nationales jésuites, car la revue des « Échos de l'USIC » s'avère introuvable pour les années 1910-1912.

(32) Pour une présentation des travaux présentés à X-Crise, voir Fischman et Lendjel [1999], [2000a] et [2000b].

Références bibliographiques

ABRAHAM-FROIS G. [1995], *Dynamique Économique*, Paris, Dalloz, 8e éd., 1995.

ARMATTE M. [1997], « Les Mathématiques sauraient-elles nous sortir de la crise économique ? X-Crise au fondement de la technocratie », Actes du Colloque *Mathématiques sociales et expertise*, Besançon, 30-31 octobre 1997.

BELHOSTE B. *et al.* (eds.) [1994], *La formation polytechnicienne*, Paris, Dunod 1994.

BELHOSTE B, DAHAN DALMEDICO A., PESTRE D., PICON A. (eds.) [1995], *La France des X : deux siècles d'histoire*, Paris, Economica, 1995.

BRAY H. E. [1922], « Rates of Exchange », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 29, 1922.

CALLON M., LATOUR B. (eds.) [1989], *La science et ses Réseaux*, La Découverte, Paris, 1989.

DEBREU G., HERSTEIN I. N. [1953], « Nonnegative Square Matrices », *Econometrica*, 21. oct. 1953.

DESBUQUOIS G. [1911], « la loi du juste prix », *Le mouvement social*, 36e année, t. LXXI, n° 10, octobre 1911, p. 867-884.

DROULERS P. [1969], *Politique Sociale et Christianisme : Le Père Desbuquois et l'Action Populaire, T. 1. Débats, Syndicalisme et Intégrisme (1903-1918) ; T.2 (1919-1946)*, les Éditions Ouvrières, Paris, 1969.

FISCHMAN M., LENDJEL E. [1999], « X-crise et le Débat sur la Réduction du Temps de Travail », *in* L. Cordonnier et N. Vaneecloo (eds.), *La réduction du temps de travail, l'espace des possibles*, numéro spécial des *Cahiers Lillois d'Économie et de Sociologie*, 1er semestre 1999, p. 33-56.

FISCHMAN M., LENDJEL E. [2000a], « X-Crise et le Modèle des Frères Guillaume », *in* DOCKÈS FROBERT P. L., KLOTZ G., POTIER J-P., TIRAN A. (eds.), *Les traditions économiques françaises : 1848-1939*, Paris, C. N. R. S. Éditions, 2000, p. 369-382.

FISCHMAN M., LENDJEL E. [2000b], « La contribution d'X-Crise à l'émergence de l'économétrie en France dans les années trente », *Revue Européenne des Sciences Sociales*, 38 (118), octobre 2000, p. 115-134.

HAWKINS D., SIMON H. A. [1949], « Some Conditions of Macroeconomic Stability » *Econometrica*, 17 jul-oct. 1949.

KOOPMANS T. C. (ed.) [1951], *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, J. Wiley and Sons ed., 1951.

LEDURE Y. (éd.) [1991], *Rerum Novarum en France*, Paris, Éditions Universitaires, 1991.

LENDJEL E. [1998], *Les métamorphoses du tâtonnement : une histoire de ses formalisations de Walras à Samuelson*, Thèse de Doctorat, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, 1998.

LENDJEL E. [2000], « Une contribution méconnue dans l'histoire de la pensée économique : le modèle de l'abbé Potron », *Cahiers d'Économie Politique*, 36, Printemps 2000, p. 145-160.

METZLER L. A. [1945], « Stability of Multiple Markets : the Hicks Conditions », *Econometrica*, 13 (4), oct. 1945, p. 277-292.

PORTER Th. [1995], « Les polytechniciens, le calcul économique et la gestion des travaux publics », *in* Belhoste, Dahan Dalmedico, Pestre, Picon [1995], p. 195-202.

POTRON M. [1904a], *Les groupes d'ordre* p^6, Paris, Gauthier-Villars, 1904, In-4, 174 p.

POTRON M. [1904b], « Sur quelques groupes d'ordre p^6 », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXXII, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

POTRON M. [1911a], « Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0 et leur application aux problèmes de la production et des salaires », *Comptes rendus de l'académie des sciences*, t. 53, séance du 4 décembre 1911, p. 1129-1131.

POTRON M. [1911b], « Application aux problèmes de la « production suffisante » et du « salaire vital » de quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0 », *Comptes rendus de l'académie des sciences*, t. 53, séance du 26 décembre 1911, p. 1458-9.

POTRON M. [1911], « Contribution Mathématique à l'Étude des Problèmes de la Production et des Salaires », Extrait des *« Échos de l'Union Sociale d'Ingénieurs Catholiques »*, [année incertaine, probablement 1911].

POTRON M. [1912], « Possibilité et détermination du juste prix et du juste salaire », *Le mouvement social*, 37e année, t. 73, n° 4, 15 avril 1912, p. 289-316.

POTRON M. [1913], « Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0 et leur application aux problèmes de la production et des salaires », *Annales Scientifiques de l'École Normale*, 3e série, t. 30, 1913, p. 53-76.

POTRON M. [1931], « Sur un théorème fondamental de la Théorie. », *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, t. 192, 1931.

POTRON M. [1933], « Sur les espaces de Riemann admettant un groupe isométrique à $n(n+1)/2$ paramètres », *Journal de Mathématique*, 9e série, t. XIII, 1933.

POTRON M. [1933], *Les Équilibres production-consommation et prix-salaires*, Paris, S.P.E.S., 1933.

POTRON M. [1935], « Sur Certaines Conditions de l'Équilibre Économique », *bulletin du C.P.E.E.*, n° 24-25, juillet-août 1935, p. 62-65, réédité *in* Lendjel [2000].

POTRON M. [1936a], *L'aspect mathématique de certains problèmes économiques*, brochure inédite présentée au cours des six conférences de 1937.

POTRON M. [1936b], *Les groupes de Lie*, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. LXXXI, Paris, Gauthier-Villars, 1936, In-8, 64 p.

POTRON M. [1937], « Sur les matrices non négatives », *Comptes rendus de l'académie des sciences*, séance du 8 mars 1937, p. 844-846.

POTRON M., DE SEGUIER J.-A. [1938], *Théorie des groupes abstraits*, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XCI, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

POTRON M. [1940], « Sur la décomposition d'un groupe continu fini », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9e série, t. XIX, fasc. 2, 1940.

SAVATIER H. [1908], « L'encyclique et la réforme sociale », *Association Catholique, revue des questions sociales et ouvrières*, t. LXV, 15 janvier 1908, p. 7-12.

SRAFFA P. [1960], *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge, Cambridge University Press, 1960.

SOLOW R. [1952], « On the Structure of Linear Models », *Econometrica*, 20, 1952.

ZAMANSKI J. [1908] « A propos du coût de la vie », *Association Catholique, revue des questions sociales et ouvrières*, t. LXV, 15 janvier 1908, p. 30-39.

ZAMANSKI Joseph [1911], « La crise alimentaire », *Le mouvement social*, 36e année, t. LXXI, n° 11, novembre 1911, p. 921-934.